УДК 517.988 + 517.968.22

О ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

Мухамбетжанов С.Т., Толеуов Т.Ж.

Аннотация. Работа посвящена исследованию обратной задачи для уравнения гиперболического типа с малым параметром при старшей производной по времени с неизвестным коэффициентом по пространственной переменной. Известно, обратные задачи для параболических уравнений, имеющие коэффициенты при старших производных, не всегда дают желаемые результаты. В настоящей работе предлагается иной подход. А именно, регуляризация параболического уравнения относительно давления с гиперболическим уравнением. Предлагаемый подход оказался удобным в практических задачах, связанных с фильтрацией жидкостей в пористой среде. Весьма важную роль играет представленная задача при разработке нефтегазовых и урановых месторождений. Полученные результаты позволяют регулировать давление нефтяного пласта и показывают, каким образом меняется пористость среды.

Ключевые слова: задача Веригина, уравнение Каттанео-Вернотте, гиперболическая модификация, вяжущие растворы.

ON AN APPROXIMATE METHOD FOR SOLVING ONE INVERSE PROBLEM OF FILTRATION THEORY

S. T. Mukhambetzhanov, T. Zh. Toleuov

Annotation. The work is devoted to the study of the inverse problem for a hyperbolic equation with a small parameter at the highest time derivative with an unknown coefficient in the spatial variable. It is known that inverse problems for parabolic equations with coefficients at the highest derivatives do not always give the desired results. In this work, we propose a different approach. Namely, the regularization of a parabolic equation with respect to pressure with a hyperbolic equation. The proposed approach turned out to be convenient in practical problems related to the filtration of liquids in a porous medium. The presented task plays a very important role in the development of oil and gas and uranium deposits. The results obtained make it possible to regulate the pressure of the oil reservoir and show how the porosity of the medium changes.

Keywords: Verigin problem, Cattaneo-Vernotte equation, hyperbolic modification, binding solutions.

Рассматриваемая задача направлена на регулирование фильтрационных процессов через давление. Известно, что на эксплуатационной скважине учитывается так называемый «концевой эффект». Его смысл состоит в том, что при вытеснении нефти водой в гидрофильной среде вода не проникает через выходные сечение до тех пор, пока на выходе не произойдет выравнивание давлений в фазах. После этого будет иметь место совместное истечение жидкостей. В результате до момента полного обводнения скважины на выходном сечении надо задавать условие отсутствие потока воды, а после полного обводнения – равенство давлений обеих фаз давлению в скважине. Основную роль в описании изменений в пористой среде играет уравнение для давления, которое отражает многие технологические показатели среды.

Представленное уравнение можно рассматривать как гиперболическую версию уравнения теплопроводности (см. например, [1, 2]). Главными являются оценки близости решений обратных задач для гиперболического и параболического уравнений для давлений. Аналогичная задача рассматривалась в [3]. Главной целью является изучение процесса между скважинами через уравнения для давлений, и его влияние на пористость пласта.

Постановка задачи. В области $Q_T = \{(t,x,z)|0 < t < T,\ 0 < x < x_0,\ |z| < \infty\}$ рассмотрим уравнение относительно давления:

$$\varepsilon \cdot P_{tt} + P_t = P_{xx} + P_{zz} + m(x,t) \cdot P_z, 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 \tag{1}$$

Здесь функции $m(x,t)$ – пористость пласта и $P(t,x,z,\varepsilon)$ – давление неизвестны. Для того, чтобы сформулировать задачу введем следующие обозначения:

$\Omega = \{(x,z)|0 < x < x_0, |z| < \infty\}$,

$Q_{T,\alpha} = \{(t,x,z)|0 < t < T_0, 0 < x < x_0, |z| < \alpha\}$,

$\Omega_\alpha = \{(x,y)|0 < x < x_0, |z| < \alpha\}$,

$\Gamma_1 = \{(t,z)|0 < t < T, |z| < \infty\}$ – граница между скважинами,

$\Gamma_2 = \{(t,x)|0 < t \le T,\ 0 \le x \le x_0\}$ – граница фильтрационного канала,

$\Gamma_\alpha = \{(t,y)|0 \le t \le T,\ |y| < \alpha\}$ – фиктивная граница,

$\Gamma_{2,h} = \{(t,x)|0 \le t \le h,\ 0 \le x \le x_0\}$.

Тогда считаем выполненными для разрешимости следующие начальные и граничные условия:

$$\mathrm{P}(0,x,z,\varepsilon) = \mathrm{P}_0(x,z),\ \mathrm{P}_t(0,x,z,\varepsilon) = \mathrm{P}_1(x,z), (x,z) \in \Omega \tag{2}$$

$$\mathrm{P}(t,0,z,\varepsilon) = \mu_1(t,z),\ P(t,x_0,z,\varepsilon) = \mu_2(t,z), (t,z) \in \Gamma_1 \tag{3}$$

$$P(t,x,0,\varepsilon) = \varphi(t,x), (t,x) \in \Gamma_2 \quad (4)$$

при этим считаем, что выполнены условия согласования, т. е.:

$$\mu_1(t,z)|_{z=0} = \varphi(t,x)|_{x=0},$$
$$\mu_2(t,z)|_{z=0} = \varphi(t,x)|_{x=x_0}, \; P_0(x,z)|_{z=0} = \varphi(t,x)|_{t=0} \quad (5)$$

Предположим, что существует преобразование Фурье по переменной z для функции $P(t,x,z,\varepsilon)$:

$$P(t,x,z,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega e^{izy}\, dy, \omega(t,x,z,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P \cdot e^{-izy} dz$$

Применяя к (1) преобразования Фурье, получим

$$\varepsilon \cdot \omega_{tt} + \omega_t = \omega_{xx} - y^2 \cdot \omega + i \cdot m(x,t) \cdot y \cdot \omega, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \quad (6)$$

Согласно условию (4) и при $z = 0$ имеет место равенство:

$$\varepsilon \cdot \varphi_{tt} + \varphi_t = \varphi_{xx} + v_{zz}|_{z=0} + m(x,t) \cdot P_z|_{z=0} \quad (7)$$

где $P_z = i \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \omega \cdot e^{izy} dy,\; P_{zz} = -\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot \omega \cdot e^{izy} dy$

Отсюда следует, что:

$$i \cdot m(x,t) = \left(\varepsilon \cdot \varphi_{tt} + \varphi_t - \varphi_{xx} + \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot \omega\, dy\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \omega\, dy\right)^{-1} \quad (8)$$

В силу произвольности пусть функция $\varphi(t,x)$ такая, что:

$$\varepsilon \cdot \varphi_{tt} + \varphi_t - \varphi_{xx} = 0 \tag{8'}$$

Из последнего предположения и соотношения (8) уравнение (6) можно переписать в виде:

$$\varepsilon \cdot \omega_{tt} + \omega_t = \omega_{xx} - y^2 \cdot \omega + y \cdot \omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot \omega \, dy \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \omega \, dy \right)^{-1} \tag{9}$$

Далее, применяя преобразования Фурье к начальным и краевым условиям, получим:

$$\omega(0, x, y) = \omega_0(x, y),\ \ \omega_t(0, x, y) = \omega_1(x, y),\ \ (x, y) \in \Omega_\alpha \tag{10}$$

$$\omega(t, 0, y) = \tilde{\mu}_1(t, y),\ \ \omega(t, x_0, y) = \tilde{\mu}_2(t, y),\ \ (t, y) \in \Gamma_2 \tag{11}$$

где $\omega_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_i(x, z) \cdot e^{-izy} dz,\ \ i = 0, 1;$

$$\tilde{\mu}_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_j(t, z) \cdot e^{-izy} dz, \qquad j = 1, 2;$$

При соответствующих предположениях задача (9) – (11) может быть представлена в виде:

$$\varepsilon \cdot \omega_{tt} + \omega_t = \omega_{xx} - y^2 \cdot \omega + y \cdot \omega \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 \cdot \omega \, dz \cdot \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} y \cdot \omega \, dy \right)^{-1},$$

$$(t, x) \in \Omega_\alpha \tag{12}$$

$$\omega(0, x, y) = \omega_0(x, y),\ \ \omega_t(0, x, y) = \omega_1(x, y) \tag{13}$$

$$\omega(t, 0, y) = \tilde{\mu}_1(t, y),\ \ \omega(t, x_0, y) = \tilde{\mu}_2(t, y) \tag{14}$$

Если задача (12) – (14) имеет гладкое решение, удовлетворяющее неравенству: $\left|\int_0^x y \cdot \omega\, dy\right| = const > 0,$ то оно единственно. Применяя неравенства Гёльдера, Коши, Пуанкаре-Фридрихса, а также лемму Гронуолла, легко показать единственность решения. Таким образом, задача (12) – (14) имеет вид:

$$\varepsilon \cdot \omega_{tt} + \omega_t = \omega_{xx} - y^2 \cdot \omega + y \cdot \omega \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 \cdot \omega\, dy \cdot \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} y \cdot \omega\, dy \right)^{-1} \tag{15}$$

$$\omega(0, x, y, \varepsilon) = \omega_0(x, y), \qquad \omega_t(0, x, y, \varepsilon) = \omega_1(x, y) \tag{16}$$

$$\omega(t, 0, y, \varepsilon) = \tilde{\mu}_1(t, y), \qquad \omega(t, x_0, y, \varepsilon) = \tilde{\mu}_2(t, y) \tag{17}$$

Для задачи (15) – (17) справедлива

Теорема. *Пусть функция $\varphi_t(t, x)$ удовлетворяет условию (8'), а $\omega_0, \omega_1, \tilde{\mu}_i$ $(i = 1, 2)$ имеют компактный носитель по переменной y принадлежащий отрезку $[-\alpha;\ \alpha]$ и $\omega_i(x, y) \in W_2^3(\Omega_2)$, $\tilde{\mu}_k(t, y) \in W_2^3(\Gamma_\alpha)$, $(i = 0,1;\ k = 1,2)$.*

Пусть, кроме того, функции ω_0, $\tilde{\mu}_k$ $(k = 1, 2)$ удовлетворяет неравенствам

$$y \cdot \omega_0 \geq 0,\ y \cdot \tilde{\mu}_k \geq 0,\ \int_{-\alpha}^{\alpha} y \cdot \omega_0\, dy = const > 0,\ \int_{-\alpha}^{\alpha} y \cdot \tilde{\mu}_k\, dy = const \quad (18)$$

Тогда задача (15) – (17) имеет единственное классическое решение $\forall t \in [0, h],\ 0 < h < T$.

Далее вернемся к задаче (12) – (14). Для доказательства (12) – (14) рассмотрим вспомогательную задачу

$$\varepsilon\cdot\omega_{tt}+\omega_t=\omega_{xx}-y^2\cdot\omega+y\cdot\omega\cdot\int_{-\alpha}^{\alpha}y^2\cdot\omega\,dy\cdot\left(F\cdot\int_{-\alpha}^{\alpha}y\cdot\omega\,dy\right)^{-1} \quad (19)$$

где $F=f+\int_{-\alpha}^{\alpha}y\cdot\widetilde{\omega}\,dy,\ \omega=\omega(t,x,y,\varepsilon)$ (20)

$$f=\begin{cases}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}y\cdot(\omega-\widetilde{\omega})dy, & \left|\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}y\cdot(\omega-\widetilde{\omega})dy\right|\le\gamma\\ \int\limits_{-\alpha}^{\alpha}y\cdot(\omega-\widetilde{\omega})dy, & \gamma\le\left|\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}y\cdot(\omega-\widetilde{\omega})dy\right|\le\gamma+1\\ \gamma+1, & \left|\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}y\cdot(\omega-\widetilde{\omega})dy\right|\ge\gamma+1\end{cases}$$

где $\widetilde{\omega}$ – решение вспомогательной задачи при $\varepsilon=0$.

Далее к (12) – (14) применяя обратное преобразование Фурье, получим

$$\varepsilon\cdot P_{tt}+P_t=P_{xx}+P_{zz}+m(x,t)\cdot P_{zz}, \qquad (t,x,z\in Q_T) \quad (21)$$

$$P(0,x,z)=P_0, \qquad P_t(0,x,z)=P_1, \qquad (x,z)\in\Omega \quad (22)$$

$$P(t,0,z)=\mu_1, \qquad P(t,x_0,z)=\mu_2, \qquad (t,x)\in\Gamma_1) \quad (23)$$

Положим в (21) – (23) условие при $z=0$. Учитывая, что

$$\mathrm{P}_{zz}|_{z=0}=\int_{-\alpha}^{\alpha}y^2\cdot\omega\,dy \quad \text{и} \quad \mathrm{P}_z|_{z=0}=i\cdot\int_{-\alpha}^{\alpha}y\cdot\omega\,dy\,,$$

получим

$$\varepsilon\cdot P_{tt}(t,x,0)+P_t(t,x,0)==P_{xx}(t,x,0)-\int_{-\alpha}^{\alpha}y^2\cdot\omega\,dy+i\cdot m(x,t)\cdot\int_{-\alpha}^{\alpha}y\cdot\omega\,dy \quad (24)$$

$$P(0,x,0)=P_0(x,0), \qquad P_t(0,x,0)=P_1(x,0) \quad (25)$$

$$P(t,0,0)=\mu_1(t,0), \qquad P(t,x_0,0)=\mu_2(t,0) \quad (26)$$

К (24) прибавим и вычтем $(\varepsilon \cdot \varphi_{tt} + \varphi_t - \varphi_{xx})$ и положим $æ = P|_{z=0} - \varphi$, тогда для $æ(x,t)$ задача (24) – (26) будет иметь вид:

$$\varepsilon \cdot æ_{tt} + æ_t - æ_{xx} + \varepsilon \cdot \varphi_{tt} + \varphi_t - \varphi_{xx} + \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 \cdot \omega \, dy +$$

$$+i \cdot m(t,x) \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} y \cdot \omega \, dy = 0$$

$$æ(0,x) = P_0(x,0) - \varphi(x,0), \qquad æ_t(0,x) = P_1(x,0) - \varphi_t(x,0),$$

$$æ(0,x) = \mu_1(t,0) - \varphi(0,t), \qquad æ(0,x_0) = \mu_2(t,0) - \varphi_t(x_0,t).$$

Так как,

$$\varepsilon \cdot \varphi_{tt} + \varphi_t - \varphi_{xx} + \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 \cdot \omega \, dy + i \cdot m(x,t) \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} y \cdot \omega \, dy = 0\,,$$

и для функции $\varphi, P_0, \mu_1, \mu_2$ выполняются условия согласования, то функция удовлетворяет уравнению:

$$\varepsilon \cdot æ_{tt} + æ_t - æ_{xx} = 0 \tag{27}$$

и условиям

$$æ|_{t=0} = 0, \quad æ_t|_{t=0} = 0 \tag{28}$$

$$æ|_{x=0} = æ|_{x=x_0} = 0. \tag{29}$$

Решением задачи (27) – (29) является $æ \equiv 0$. Из того, что $æ \equiv 0$, следует неравенство $æ|_{x=0} = u|_{z=0} = \varphi(t,x)$. Таким образом, получаем, что найденные функции $P(t,x,z)$ и $m(t,x)$ являются решением исходной задачи (1) – (4). Далее рассмотрим поведение функции $\mathrm{p}(t,x,z)$ и $m(t,x)$ при $\varepsilon \to 0$. Положим $v = p - \tilde{p}$, $\overline{m} = m - \widetilde{m}$ и $z = \omega - \widetilde{\omega}$, где $\mathrm{p}(t,x,z)$ и $m(t,x)$ есть решение исходной задачи (1) – (4), а $\tilde{p}(t,x,z)$ и $\tilde{m}(t,x)$ – решение задачи (1) – (4) при $\varepsilon = 0$. Так как,

$$p = \int_{-\alpha}^{\alpha} \omega \cdot e^{izy} dy, \ \ \tilde{p} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \tilde{\omega} \cdot e^{izy} dy, \ \ \tilde{m}(t,x) = -\frac{i \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 \cdot \tilde{\omega} dy}{\int_{-\alpha}^{\alpha} y \cdot \tilde{\omega} dy},$$

$$\|z_x\| \le C \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot p \cdot |e^{izy}| = 1,$$

то выполняются оценки:

$$|v| = \left| \int_{-\alpha}^{\alpha} z \cdot e^{izy} dy \right| \le \int_{-\alpha}^{\alpha} |z| dy \le \|z_x\| \le C \cdot \sqrt{\varepsilon} \tag{30}$$

$$|\overline{m}(x,t)| = \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 \cdot \omega \, dy \cdot \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} y \cdot \omega \, dy \right)^{-1} - \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 \cdot \tilde{\omega} dy \cdot \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} y \cdot \tilde{\omega} \, dy \right)^{-1} =$$

$$= C_1 \cdot \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 \cdot z \, dy \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} y \cdot \tilde{\omega} \, dy + \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 \cdot \tilde{\omega} dy \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} y \cdot z dy \right) \le C_2 \cdot \|z_x\| \le$$

$$\le C_3 \cdot \sqrt{\varepsilon} \tag{31}$$

Оценки (30) – (31) позволяют утверждать, что при $\varepsilon \to 0$ решение обратной гиперболической задачи стремится к решению параболической задачи.

Список литературы

1. Веригин, Н. Н. Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водопроницаемости основания гидротехнических сооружений / Н. Н. Веригин // Изв. АН СССР. Отд-ние техн.наук. – 1952. – С. 674-684.

2. Новиков, В. А., Саватеев, Е. Г., Слинько, О. Н. Об одной обратной задаче для уравнений Каттанео-Вернотте / В. А. Новиков, Е. Г. Саватеев, О. Н. Слинько // Динамика сплошной среды, Новосибирск. – 1993. – Вып.106. – С. 75-96.

3. Рудяк, В. Я., Смагулов, Ш. С. О гиперболической модификации уравнения Бюргерса / В. Я. Рудяк, Ш. С. Смагулов // Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск. – 1981. – Т. 12. – № 2. – С. 84-97.

Сведения об авторах

Мухамбетжанов Салтанбек Талапеденович – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Международной Инженерной Академии, Казахский национальный университет им. аль-Фараби; Казахстан, г. Алматы.

Толеуов Тимур Жаксылыкович – старший преподаватель кафедры «Информатики и информационных технологий», Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова; Казахстан, г. Актобе.

About authors

Mukhambetzhanov Saltanbek Talapedenovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Corresponding Member of the International Engineering Academy, Kazakh National University named after al-Farabi; Kazakhstan, Almaty.

Toleuov Timur Zhaksylykovich – Senior Lecturer of the Department of «Informatics and Information technologies», Aktobe Regional University named after K. Zhubanov; Kazakhstan, Aktobe.