International Electronic Periodical Edition
«KAZAKHSTAN SCIENCE JOURNAL» FEBRUARY 2021
MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES

УДК 517.946

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ТРЕХФАЗНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

Hajiahmad Joya, Байжасарова К.К.

Аннотация. В работе рассматривается смешанная задача фильтрации трехфазной несжимаемой жидкости. Получены априорные оценки для регуляризованной задачи. Доказана теорема существования обобщенного решения. Дана оценка, близости решения регуляризованной задачи и к решению исходной задачи.

Ключевые слова: трехфазная несжимаемая жидкость, регуляризованная задача, фиктивная область, априорная оценка, капиллярные и гравитационные силы.

ON ONE APPROXIMATE SOLUTION METHOD THREE-PHASE INCOMPRESSIBLE LIQUID IN POROUS MEDIUM TAKING INTO ACCOUNT CAPILLARY FORCES

Hajiahmad Joya, K.K. Bayzhasarova

Annotation. The paper considers a mixed problem of filtration of a three-phase incompressible liquid. A priori estimates are obtained for the regularized problem. The existence theorem for a generalized solution is proved. An estimate is given for the proximity of the solution of the regularized problem to the solution of the original problem.

Keywords: three-phase incompressible fluid, regularized problem, fictitious domain, a priori estimate, capillary and gravitational forces.

1. Постановка задачи

Рассматривается постановка задачи о фильтрации трехфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных и гравитационных сил. Постановка задачи о фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил достаточно хорошо изучалась в работе [1]. Хотя эти постановки практически те же, что и в [1], случай i > 2 (i – число несмешивающихся фаз) обладает новыми особенностями, не вытекающими из [1]. Дальнейшее развитие получило в работах Ш.С. Смагулова и его учеников в [2-4].

Задача, сводится к решению системы дифференциальных уравнений на потенциалах Φ_i, i = 1, 2, 3 в области $\Omega \subset R^2$.

$$\alpha_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}+\alpha_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}-(\alpha_1+\alpha_2)\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}=div(K_1\cdot\nabla)\Phi_1+f_1,$$

$$\alpha_{21}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}-(\alpha_2+b_2)\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}=div(K_2\cdot\nabla)\Phi_2+f_2, \qquad (1)$$

$$-(\alpha_1+\alpha_2)\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}-(\alpha_2+b_2)\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}+(\alpha_1+2\alpha_2+b_2)\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}=div(K_3\cdot\nabla\Phi_3)+f_3,$$

где $a_i = a_i(x)$, $b_i = b_i(x)$, $i = 1,2,3$ – гладкие функции, зависящие от пространственных переменных.

Заметим, что матрица $A=\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & -(\alpha_1+\alpha_2) \\ \alpha_2, & b_2, & -(\alpha_1+b_2) \\ -(\alpha_1+\alpha_2), & -(\alpha_2+b_2), & (\alpha_1+2\alpha_2+b_2)\end{pmatrix}$,

– вырожденная, симметричная. Система уравнений (1) относительно производных $\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}, i=1,2,3$ неразрешима и выполнены условия: $m\le \mathrm{K}_i \le \mathrm{M}<\infty,\quad i=1,2,3$. Для системы уравнений (1) поставим следующие начальные условия

$$\left(\alpha_1\Phi_1+\alpha_2\Phi_2-(\alpha_1+\alpha_2)\Phi_3\right)\big|_{t=0}=\Phi_0(x),$$

$$\left(\alpha_2\Phi_1+b_2\Phi_2-(\alpha_1+b_2)\Phi_3\right)\big|_{t=0}=\Phi_1(x), \qquad (2)$$

$$\Phi_i\Big|_S=0, \qquad (3)$$

где S-граница области Ω. Дальнейшие обозначения взяты из работ [3], [4].

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1) – (3) называется функция

$$\Phi_i \in L_2(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1) \quad i=1,2,3.$$

Из (1)-(3) находим значение $\Phi_i(z,x)$ в начальный момент времени. Сложим систему уравнений (1), получим:

$$\sum_{i=1}^{3} div(K_i\cdot\nabla)\Phi_i+n\sum_{i=1}^{3} f_1=0\,. \qquad (4)$$

Предположим, $\alpha_{1,} b_{2,} \alpha_1+2\alpha_2+b_2$ строго больше нуля. Предположим, что один из определителей отличен от нуля:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2\\ \alpha_{2,} & b_2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha_1, & -(\alpha_1+\alpha_2)\\ \alpha_{2,} & -(\alpha_1+b_2)\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha_2, & -(\alpha_1+\alpha_2)\\ b_{2,} & -(\alpha_1+b_2)\end{pmatrix},$$

Для простоты положим: $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_{2,} & b_2\end{pmatrix}\neq 0$. Тогда система линейных уравнений (2) однозначно разрешима относительно Φ_1,Φ_2:

$$\Phi_1^0=d_1(x)\Phi_3^0+F_1,\qquad \Phi_2^0=d_2(x)\Phi_3^0+F_2. \qquad (5)$$

Подставляя в (4), получим

$$div(K_1 \cdot \nabla)d_1\Phi_3^0 + div(K_2 \cdot \nabla)d_2\Phi_3^0 + div(K_3 \cdot \nabla)\Phi_3^0 dx = F_4 \qquad (6)$$

$$\Phi_3^0 \Big|_S = 0 \qquad (7)$$

Предположим, что система (6), (7) однозначно разрешима. Отсюда находим

$\Phi_3^0 = \Phi_3 \Big|_{t=0}.$ Из (5) находим $\Phi_3^0, \ \ \Phi_2^0.$ Предположим

$$(\mathrm{A}\Phi, \Phi) \geq 0, \quad \mathrm{A}^* = \mathrm{A}. \qquad (8)$$

Определение 2. Обобщенным решением задачи (1) – (3) называется функция $\Phi_i \in L_2(0,T;\overset{0}{W_2}(\Omega)), \quad i = 1,2,3,$ удовлетворяющая следующему интегральному тождеству

$$-\int_0^T (\mathrm{A}\Phi, \varphi t)_\Omega dt + \int_0^T (K \cdot \nabla\Phi, \nabla\varphi)_\Omega dt - \int_0^T (\mathrm{A}\Phi_0, \varphi(0))_\Omega dt = \int_0^T (f, \varphi)_\Omega dt, \qquad (9)$$

$\forall \varphi \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q), \quad \varphi(T) = 0, Q = [0.T] \times \Omega.$ Здесь $(K \cdot \nabla\Phi, \nabla\varphi) = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega (K_i \cdot \nabla\Phi_i, \nabla\varphi i) dx.$

Справедлива следующая теорема

Теорема 1. Пусть $f \in L_2(0,T;\overset{-1}{W_2}(\Omega))$ и из системы (1) и условий (2) и (3) однозначно находятся значения функции $\Phi_i(t,x)\Big|_{t=0} = \Phi_i^0(x).$ Тогда существует обобщенное решение задачи (1) – (3).

Докажем теорему 1 методом Галеркина и методом ε - регуляризации.

2. Параболическая регуляризация системы (1) – (3)

Для доказательства теоремы существования рассмотрим систему уравнений параболического типа с малым параметром.

$$\varepsilon \frac{\partial \Phi_1^\varepsilon}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial \Phi_1^\varepsilon}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial \Phi_2^\varepsilon}{\partial t} - (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\partial \Phi_3^\varepsilon}{\partial t} = div(\mathrm{K}_1 \cdot \nabla)\Phi_1^\varepsilon + f_1,$$

$$b_2 + \varepsilon\frac{\partial \Phi_2^\varepsilon}{\partial t} + \alpha_2\frac{\partial \Phi_1^\varepsilon}{\partial t} - (\alpha_1+\alpha_2)\frac{\partial \Phi_3^\varepsilon}{\partial t} = div(\mathrm{K}_2\cdot\nabla)\Phi_2^\varepsilon + f_2, \tag{10}$$

$$\varepsilon\frac{\partial \Phi_3^\varepsilon}{\partial t} - (\alpha_1+\alpha_2)\frac{\partial \Phi_1^\varepsilon}{\partial t} - (\alpha_2+b_2)\frac{\partial \Phi_2^\varepsilon}{\partial t} + (\alpha_1+2\alpha_2+b_2)\frac{\partial \Phi_3^\varepsilon}{\partial t} = div(\mathrm{K}_3\cdot\nabla)\Phi_3^\varepsilon + f_3,$$

$$\Phi^\varepsilon\Big|_{t=0} = \Phi_0^\varepsilon = \left(\Phi_1^\varepsilon,\Phi_2^\varepsilon,\Phi_3^\varepsilon\right)\Big|_{t=0} = \left(\Phi_1^0,\Phi_2^0,\Phi_3^0\right) = \left(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3\right)\Big|_{t=0}. \tag{11}$$

$\Phi^\varepsilon\Big|_S = 0$ находится из (1) – (3). Пусть система $\{\omega_j\} = (\omega_{1j},\omega_{2j},\omega_{3j}),\ j = 1,\dots,N,$ *базис в пространстве* $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Приближенное решение задачи (10), (11) будем искать в виде: $\Phi_N^\varepsilon = \left(\Phi_{1N}^\varepsilon,\Phi_{2N}^\varepsilon,\Phi_{3N}^\varepsilon\right) = \sum_{j=1}^N \omega_j C_j(t),$ где коэффициенты $C_j(t)$ находятся из системы обыкновенных дифференцированных уравнений

$$\varepsilon\left(\frac{\partial \Phi_N^\varepsilon}{\partial t}\omega_j\right) + \left(\mathrm{A}\Phi_{Nt}^\varepsilon,\omega_j\right) + \left(\mathrm{K}\cdot\nabla\Phi_N,\omega_j\right) = \left(f,\omega_j\right), \quad j = 1,\dots N, \tag{12}$$

$$\Phi_N^\varepsilon\Big|_{t=0} = \Phi_N^0(x) = \sum_{j=1}^N (\Phi_0^\varepsilon,\omega_j)\omega_j, \tag{13}$$

Заметим $\left((A+\varepsilon E),\Phi,\Phi\right) > \varepsilon|\Phi|^2,$ что определитель А + εЕ – строго больше нуля, следовательно система уравнений (12) однозначно разрешима относительно производных Φ_{it}^ε. Отсюда из общей теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений следует разрешимость задачи (12), (13). Теперь умножим (12) на $C_j(t),$ суммируем по $j = \overline{1,N},$ в результате получим

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\left\|\Phi_N^\varepsilon\right\|^2 + K\left\|\nabla\Phi_N^\varepsilon\right\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{2dt}\left\|A^{1/2}\Phi_N^\varepsilon\right\|^2 \le \left|\left(f,\Phi_N^\varepsilon\right)\right| \le \left\|f\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{-1}(\Omega)}\left\|\Phi_N^\varepsilon\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(\Omega)},$$

где $0 < m \le \mathrm{K}_0 = \min(K_1(x), K_2(x), K_3(x)).$ Отсюда получаем оценку

$$\frac{\varepsilon}{2}\left\|\Phi_N^\varepsilon\right\|_{L\infty(0,T;L_2(\Omega))}+K_0\int_0^T\left\|\nabla\Phi_N^\varepsilon\right\|^2dt+\frac{1}{2}\int_0^T\left\|A^{1/2}\Phi_N^\varepsilon\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}dt\leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\left\|\Phi_{N0}^\varepsilon\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|A^{1/2}\Phi_{N0}^\varepsilon\right\|^2dt+\delta\left\|\Phi_N^\varepsilon\right\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}+C_\delta\left\|f\right\|^2_{L_2(0,T;\overset{0}{W}{}_2^{-1}(\Omega))} \tag{14}$$

Итак, при малом δ получим оценку

$$\frac{\varepsilon}{2}\left\|\Phi_N^\varepsilon\right\|^2_{L\infty(0,T;L_2(\Omega))}+\left(K_0-\delta\right)\int_0^T\left\|\nabla\Phi_N^\varepsilon\right\|^2dt+\left\|A^{1/2}\Phi_N^\varepsilon\right\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\leq C<\infty, \tag{15}$$

где C не зависит от значения малого параметра ε. В силу оценки (15) из последовательности $\{\Phi_N^\varepsilon\}$ можно выделить под последовательности, опять обозначаемые $\{\Phi_N^\varepsilon\}$, для которых справедливо соотношение

$$\Phi_N^\varepsilon\to\Phi^\varepsilon\quad *\,слабо\ в\ L\infty(0,T;L_2(\Omega)),\ \Phi_N^\varepsilon\to\Phi^\varepsilon\quad *\,слабо\ в\ L_2(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$$

при N $\to\infty$.

Заметим, что Φ^ε является обобщенным решением задачи, причем для Φ^ε справедлива оценка (15). Следовательно, из последовательности $\{\Phi^\varepsilon\}$ можно выделить под последовательности, для которых имеет место

$$\Phi^\varepsilon\to\Phi\quad слабо\ в\ L_2(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)),\ \Phi^\varepsilon\to\Phi\quad слабо\ в\ L\infty(0,T;L_2(\Omega))\ \text{при}$$

$$\varepsilon\to 0.$$

Легко увидеть, что Ф является обобщенным решением задачи (1) – (3).

Дальнейшие дифференциальные свойства решения задач (1) – (3) и (10), (11).

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\Phi_1^\varepsilon}{\partial t}+Q_1(t,x)\right)+\alpha_1\frac{\partial\Phi_1^\varepsilon}{\partial t}+\alpha_2\frac{\partial\Phi_2^\varepsilon}{\partial t}-(\alpha_1+\alpha_2)\frac{\partial\Phi_3^\varepsilon}{\partial t}=div(K_1\cdot\nabla)\Phi_1^\varepsilon+f_1,$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\Phi_2^\varepsilon}{\partial t}+Q_2(t,x)\right)+b_2\frac{\partial\Phi_2^\varepsilon}{\partial t}-(\alpha_2+b_2)\frac{\partial\Phi_3^\varepsilon}{\partial t}+b_2\frac{\partial\Phi_2^\varepsilon}{\partial t}=div(K_2\cdot\nabla)\Phi_2^\varepsilon+f_2, \tag{16}$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\Phi_3^\varepsilon}{\partial t}+Q_3(t,x)\right)-(\alpha_1+a_2)\frac{\partial\Phi_1^\varepsilon}{\partial t}-(\alpha_2+b_2)\frac{\partial\Phi^\varepsilon}{\partial t}+(\alpha_1+2\alpha_2+b_2)\frac{\partial\Phi_3^\varepsilon}{\partial t}=div(K_3\cdot\nabla)\Phi_3^\varepsilon,$$

$$\Phi^\varepsilon\Big|_{t=0}=\Phi_0^\varepsilon;\qquad \Phi^\varepsilon\Big|_{S}=0. \tag{17}$$

Здесь Q_1, Q_2, Q_3 – известные функции, построенные таким образом, что удовлетворяют условию: $\left.\frac{\partial^\kappa\Phi^\varepsilon}{\partial t^k}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^\kappa\Phi}{\partial t^k}\right|_{t=0}$, $k=0,1,2,....,M$.После этого в силу уравнения (10) и условия (11) можно получить оценку

$$\left\|\frac{\partial^\kappa\Phi_x^\varepsilon}{\partial t^k}\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\le C<\infty, \tag{18}$$

причем оценка (18) равномерна по ε, также можно получить оценки скорости сходимости решений

$$\left\|\Phi^\varepsilon-\Phi\right\|_{L_2\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right)}\le C\varepsilon. \tag{19}$$

Оценка (19) не улучшаемая в смысле порядка ε.

3. О применении метода фиктивных областей для модели фильтрации трёхфазной жидкости

В настоящем пункте дано обоснование метода фиктивных областей для модели трёхфазной несжимаемой жидкости с учётом капиллярных сил. Дана оценка скорости сходимости решения. Доказана теорема существования обобщённого решения.

Постановка задачи. В работе [1] получены уравнения трёхфазной несжимаемой жидкости с учётом капиллярного давления. Модель сводится к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных, неразрешимой относительно производных по времени.

$$a_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}-(a_1+a_2)\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}=div(K_1\cdot\nabla\Phi_1)+f_1\ ,$$

$$a_2\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}-(a_2+b_2)\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}=div(K_2\cdot\nabla\Phi_2)+f_2\,, \qquad (20)$$

$$-(a_1+a_2)\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}+(a_2+b_2)\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}+(a_1+2a_2+b_2)\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}=div(K_3\cdot\nabla\Phi_3)+f_3\ ,$$

с начально-краевыми условиями

$$(a_1\Phi_1+a_2\Phi_2-(a_1+a_2)\Phi_3)\big|_{t=0}\Phi_0$$

$$(a_2\Phi_1+b_2\Phi_2-(a_2+b_2)\Phi_3)\big|_{t=0}\Phi_1 \qquad (21)$$

$$\Phi_1\big|_S=\Phi_2\big|_S=\Phi_3\big|_S=0 \qquad (22)$$

Метод фиктивных областей для двухфазной фильтрации с учётом капиллярного давления исследован в работе [1, 2]. Полученные оценки скорости сходимости решения улучшаемы. В настоящей работе изучается задача (20) – (22). Следует отметить, что с помощью метода фиктивных областей полученные оценки скорости сходимости решения в норме L_2 не улучшаемые. вспомогательная задача в дополнительной области $D=\Omega\cup D_1$ сводится к решению следующей системы дифференциальных уравнений.

$$a_1\frac{\partial\Phi_1^\varepsilon}{\partial t}+a_2\frac{\partial\Phi_2^\varepsilon}{\partial t}-(a_1+a_2)\frac{\partial\Phi_3^\varepsilon}{\partial t}=div(K_1\cdot\nabla\Phi_1^\varepsilon)+f_1-\frac{\xi(x)}{\varepsilon}\Phi_1^\varepsilon,$$

$$a_2\frac{\partial\Phi_1^\varepsilon}{\partial t}+b_2\frac{\partial\Phi_2^\varepsilon}{\partial t}-(a_1+b_2)\frac{\partial\Phi_3^\varepsilon}{\partial t}=div(K_2\cdot\nabla\Phi_2^\varepsilon)+f_2-\frac{\xi(x)}{\varepsilon}\Phi_2^\varepsilon, \quad (23)$$

$$-(a_1+a_2)\frac{\partial\Phi_1^\varepsilon}{\partial t}+(a_2+b_2)\frac{\partial\Phi_2^\varepsilon}{\partial t}+(a_1+2a_2+b_2)\frac{\partial\Phi_3^\varepsilon}{\partial t}=div(K_3\cdot\nabla\Phi_3^\varepsilon)+f_3-\frac{\xi(x)}{\varepsilon}\Phi_3^\varepsilon,$$

$$(a_1\Phi_1^\varepsilon+a_2\Phi_2^\varepsilon-(a_1+a_2)\Phi_3^\varepsilon\Big|_{t=0}=\Phi_0,$$

$$(a_2\Phi_1^\varepsilon+b_2\Phi_2^\varepsilon-(a_2+b_2)\Phi_3^\varepsilon\Big|_{t=0}=\Phi_1, \quad (24)$$

$$\Phi_1^\varepsilon\Big|_{S_1}=\Phi_2^\varepsilon\Big|_{S_1}=\Phi_3^\varepsilon\Big|_{S}=0, \quad (25)$$

где

$\xi(x)=\begin{cases}0, & x\in\Omega\\ 1, & x\in D_1=D\setminus\Omega\end{cases}$ S_1 – граница области D. $a_i(x), b_i(x),\ K_i(x)>0,\ f_i$, $i=1,2,3$. Искомую функцию продолжаем вне Ω с сохранением нормы так, чтобы $(A\Phi,\Phi)_D\ge 0$,

$$A=\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & -(a_1+a_2)\\ a_{2,} & b_2 & -(a_1+b_2)\\ -(a_1+a_2), & -(a_2+b_2), & (a_1+2a_2+b_2)\end{pmatrix}$$

Будем предполагать, что $a_i,\ i=1,\,2,\,3$ выбраны так, что из условий (20) – (22). $\Phi_1\big|_{t=0}=\Phi_{10}(x)$, $\Phi_2\big|_{t=0}=\Phi_{20}(x)$, $\Phi_3\big|_{t=0}=\Phi_{30}(x)$ находятся однозначно и выполнены условия

$$a_1,\ b_2,\ (a_1+2a_2+b_2)\ge m>0. \quad (26)$$

Определение 3. *Обобщённым решением задачи (23)-(25) называется функция* $\Phi_i^\varepsilon\in\ L_2(0,T\overset{0}{W}{}_2^1(D))$, $i=1,\ 2,\ 3$, *удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$-\int_O^T (A\Phi^\varepsilon, \ell_t)_D dt + \int_O^T (K\nabla\Phi^\varepsilon, \nabla\ell)_D dt - (a\Phi^\varepsilon, \ell)_D |_{t=0} = \int_O^T (f, \ell)_D dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_O^T\int_D (\Phi^\varepsilon, \ell)_{D_1} dxdt, \quad (27)$$

для любого $\ell_t \in L_2(0,T;L_2(D)),\ \ell(T) = 0,\ \ell \in L_2(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(D))$.

Здесь $(K\Delta\phi^\varepsilon, \Delta\varphi) = \Sigma^3 i = 1(K_i \Delta \phi_i, \Delta \varphi_i)_D$.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $\Phi_0 \in L_2(D)$, $\Phi_1 \in L_2(D)$, $f \in L_2(0, T; \overset{0}{W}{}_2^1(D))$. Тогда существует обобщенное решение задачи (22) – (25) и справедлива оценка

$$A^{1/2}\Phi^\varepsilon L_\infty(0, T; L_2(D)) + \Phi^\varepsilon L_2(0, T; \overset{0}{W}{}_2^1(D)) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Phi^\varepsilon L_\infty(0, T; L_2(D_1)) \le C$$

(28)

Доказательство. Рассмотрим регуляризованную задачу

$$\upsilon\frac{\partial\phi^\nu}{\partial t} + A\Phi_t^\nu = div(K\Delta)\Phi^\nu - \frac{\Sigma_{(\chi)}}{\Sigma}\Phi^\nu + f. \quad (29)$$

$$\Phi^\nu\Big|_{t=0} = \Phi_0^1(\chi), \quad (30)$$

$$\Phi^\nu\Big|_s = 0 \quad (31)$$

где υ – положительный малый параметр $(\upsilon + A) \ge 0$. По построению А - самосопряженная. $\Phi_0^1(\chi)$ – продолжены нулем вне Ω, значение $\Phi(t,x)\Big|_{t=0} = (\Phi_1(t,x), \Phi_2(t,x), \Phi_3(t,x))\ \Big|_{t=0}$ находятся из системы (20) – (22).

Определение 4. Обобщенное решение задачи (29) – (31) определяется примерно также, как в определении 1. Система уравнений (29) строго параболическая.

При фиксированном $\upsilon \ge 0$ существование обобщенного решения доказывается так же, как в работе [3] и для решения имеет место оценка

$$\upsilon\left\|\Phi^{\upsilon}\ \right\|^{2}+\left\|A^{1/2}\Phi^{\upsilon}\right\|_{L_2(0,T;L_2(D))}+\left\|\Delta\Phi^{\upsilon}\right\|^{2}_{L_2(0,T;L_2(D))}+\frac{1}{\sum}\left\|\Phi^{\upsilon}\right\|_{L_2(0,T;L_2(D))}\le$$

$$\le\left(\left\|f\right\|^{2}_{L_2(0,T;W_2^{-1}(D))}+\left\|A^{1/2}\Phi^{\nu}\right\|^{2}\Big|_{t=0}\right) \qquad (32)$$

Следовательно, из последовательности $\{\Phi^{\nu}\}$ можно выделить подпоследовательности, для которых справедливо соотношение

$$\Phi^{\nu}\longrightarrow\Phi^{\varepsilon}\ \text{слабо в}\ \ L_2(0,T;L_2(D)),\ \ \upsilon\Phi^{\upsilon}\longrightarrow 0*\text{слабо в}\ \ L_{\infty}(0,T;L_2(D)), \qquad (33)$$

при $\upsilon\longrightarrow 0$. Заметим, что Φ^{ε} является обобщенным решением задачи (23) – (25) и для решения справедлива оценка (28). Значит, из последовательности $\{\Phi^{\varepsilon}\}$ можно выделить подпоследовательности, для которых справедливо соотношение

$$\Phi^{\varepsilon}\longrightarrow\Phi\ \text{слабо в}\ L_2(0,T;W_2^{1}(D)),\ \Phi^{\varepsilon}\longrightarrow 0\ \text{сильно в}\ L_2(0,T;L_2(D_1)), \qquad (34)$$

В силу теоремы вложения [4] и из (34) $\Phi^{\varepsilon}\longrightarrow 0$ сильно в $L_2(0,T;L_2(S))$, откуда заметим, что Φ – является обобщённым решением задачи (20) – (22).

Теорема 3. *Пусть* $f\in L_2(0,T;L_2(\Omega))$, $\Phi|_{t=0}=\Phi_0\in\overset{0}{W}{}_2^{1}(\Omega)$, *выполнены все условия теоремы 1, тогда имеет место оценка:* $\left\|\Phi^{\varepsilon}-\Phi\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\le C\sqrt{\varepsilon}$.

Доказательство. Умножим (20) на $\ell\in W_2^{1}(D)$, интегрируем по области Ω, в результате получим $(a\Phi_t,\ell)\Omega+(K\nabla\Phi,\nabla\ell)D-\int_S K\frac{\partial\Phi}{\partial n}\ell dS=(f,\ell)\Omega$. Для разности $\omega = \Phi^{\varepsilon} - \Phi$ получим интегральное тождество. При этом Ф продолжаем нулём вне Ω и положим Ф=ω.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|A^{1/2}\omega\right\|_D^2 + K\left\|\nabla\omega\right\|_D^2 + \frac{1}{\omega}\left\|\omega\right\|_{D_1}^2 = \int_S K\,\frac{\partial\Phi}{dn}\,\omega dS\,, \tag{35}$$

где $K_0 = \min_{\Omega}\{K_i\}$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Оцениваем правую часть (35) по неравенству Гельдера

$$\left|\int_S K\,\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,\omega dS\right| \le C\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right\|_{L_2(S)}\left\|\omega\right\|_{L_2(S)} \le \delta\left(\left\|\nabla\omega\right\|_D^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left\|\omega\right\|_{D_1}^2\right) + C_\delta\sqrt{\varepsilon} \tag{36}$$

Отсюда: $\max_{0\le t\le T}\left\|A^{1/2}\omega\right\|_D^2 + \int_O^T\left\|\nabla\omega\right\|_D^2 dt \le C\sqrt{\varepsilon}\,,$ (37)

где постоянная С не зависит от ε. Из (36), (37) получим

$$\left\|\omega\right\|_{L_2(0,T;L_2(S))} \le C\sqrt{\varepsilon}\,, \tag{38}$$

Теперь для ω получим уравнение: $A\,\omega_t = div(K\nabla\omega)$, $(a_1\omega_1 + a_2\omega_2 - (a_1 + a_2)\omega_3)\big|_{t=0} = 0$,

$(a_2\omega_1 + b_2\omega_2 - (a_1 + b_2)\omega_3)\big|_{t=0} = 0$, $\omega\big|_S = \Phi^{\varepsilon}\big|_S$. Умножим (38) на ℓ и проинтегрируем по области $Q_1 = (0,T)\,\mathrm{x}\,\Omega$ и по частям

$$\int_O^T\left(\omega_1 A\,\ell_t + div(K\nabla\ell)\right)_\Omega dt + \int_O^T\left(\int_S K\,\frac{\partial\ell}{\partial n}\,\omega dS + \int_S \ell K\,\frac{\partial\omega}{\partial n}\,dS\right)dt = 0\,, \tag{39}$$

$A\,\omega\big|_{t=0} = 0,\quad \omega\big|_S = \Phi^{\varepsilon}\big|_S = 0$. Положим

$A\,\ell_1 + div(K\nabla\ell) = \omega\,,$

$$A\,\ell\big|_{t=T}=0,\ \ \ell\big|_{S}=0 \tag{40}$$

Для решения задачи (39) имеет место оценка:

$$\|\ell_t\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}+\|\ell\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}\cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\le C\|\omega\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}$$

Оценим интеграл (39) по неравенству вложения

$$\int_O^T\int_S K\frac{\partial\ell}{\partial n}\omega dSdt\le C\int_O^T\|\omega\|_{L_2(S)}\left\|\frac{\partial\ell}{\partial n}\right\|_{L_2(S)}dt\le\int_O^T\|\omega\|_{L_2(S)}\|\omega\|_{L_2(\Omega)}dt\le\delta\|\omega\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}+C\sqrt{\varepsilon} \tag{41}$$

Отсюда, из (39) – (41) следует $\|\omega\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\le C\sqrt{\varepsilon}$. Итак, теорема 2 полностью доказана. аналогично можно исследовать метод фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам

$$A\Phi_t^{\varepsilon}=div(K^{\varepsilon}\nabla\Phi^{\varepsilon})+f\,,$$

$$\Phi^{\varepsilon}\big|_{t=0}=\Phi_0\,,\ \Phi^{\varepsilon}\big|_{S1}=0 \tag{42}$$

с условиями согласования

$$\left[\Phi^{\varepsilon}\right]_S=0;\ \left[K^{\varepsilon}\nabla\Phi\cdot n\right]_S=0, \tag{43}$$

$$K^{\varepsilon}=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon}, & x\in D_1,\\ 1, & x\in\Omega.\end{cases}$$

Окончательно имеет место оценка: $\|\Phi-\Phi^{\varepsilon}\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\le C\varepsilon$. Эта оценка доказывается примерно так же, как оценка в теореме 1.

Список литературы

1 Коновалов, А. Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости / А. Н. Коновалов. – Новосибирск: Наука, 1988. – 166 с.

2 Жумагулов, Б. Т., Зубов, Н. В., Монахов, В. Н., Смагулов, Ш. С. Новые компьютерные технологи в нефтедобыче / [Б. Т. Жумагулов и др.]. – Алматы: Гылым, 1996. – 167 с.

3 Баимиров, К. М. Численное моделирование трехмерных уравнений Маскета – Леверетта / К. М. Баимиров // Междунар. научно-практ. конф. «Проблемы ВМ и ИТ». – Алматы, 1999. – С. 56.

4 Смагулов, Ш. С., Мухамбетжанов, С. Т., Баймиров, К. М. Разностные схемы для моделирования двухмерных уравнений Маскета-Леверетта на нерегулярной сетке / Ш. С. Смагулов, С. Т. Мухамбетжанов, К. М. Баймиров // Доклады 3-й Казахстанско-Росс. научно-практ. конф., 19-20 октября 2000г. – Алматы. – С. 43-48.

Сведения об авторах

Hajiahmad Joya – преподаватель педагогического и математического факультета, Багланский университет; Афганистан, г. Поул-э-Хомри.

Байжасарова Калима Кабидетовна – магистрант, Атырауский инженерно-гуманитарный институт; Казахстан, г. Атырау.

About authors

Hajiahmad Joya – Teacher of the Faculty of Education and Mathematics Department, Baghlan University; Afghanistan, Pole-e-Khomri City.

Bayzhasarova Kalima Kabidetovna – Master's student, Atyrau Engineering and Humanities Institute; Kazakhstan, Atyrau.