УДК 004.94, 517.9

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТАХ

Сабитова Г.С., Тынчтыкова Д.Т.

Аннотация. Для многих практически важных случаев задачи, описываемые дифференциальными уравнениями, весьма сложны, и получить их точное решение оказывается затруднительно или невозможно. Эти трудности могут быть связаны с видом уравнения, например, с его нелинейным характером. Однако решить подобные сложные задачи, так же, как и более простые, можно с помощью прикладных программ. В работе рассматривается реализация численных методов решения дифференциальных уравнений в математическом пакете Maple.

Ключевые слова: численное интегрирование, обыкновенные дифференциальные уравнения, пакет Maple.

NUMERICAL METHODS FOR SOLVING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MATHEMATICAL PACKAGES

Sabitova G.S., Tynchtykova D.T.

Annotation. For many practically important cases, the problems described by differential equations are very complex, and it is difficult or impossible to obtain their exact solution. These difficulties may be related to the type of equation, for example, its nonlinear nature. However, such complex tasks, as well as simpler ones, can be solved with the help of application programs. In this paper we consider the

implementation of numerical methods for solving differential equations in a mathematical package Maple.

Keywords: numerical integration, ordinary differential equations, Maple package.

При решении научных и инженерно-технических задач часто бывает необходимо математически описать какую-либо динамическую систему. Лучше всего это делать в виде дифференциальных уравнений (ДУ) или системы дифференциальных уравнений. Наиболее часто такая задача возникает при решении проблем, связанных с моделированием кинетики химических реакций и различных явлений переноса (тепла, массы, импульса) – теплообмена, перемешивания, сушки, адсорбции, при описании движения макро- и микрочастиц [4, 8].

Известные методы точного интегрирования дифференциальных уравнений позволяют найти решение в виде аналитической функции, однако эти методы применимы для очень ограниченного класса функций. Большинство уравнений, встречающихся при решении практических задач нельзя проинтегрировать с помощью этих методов.

В таких случаях используются *численные методы решения*, которые представляют решение дифференциального уравнения не в виде аналитической функции, а в виде таблиц значений искомой функции в зависимости от значения переменной [1].

Существует несколько методов численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые отличаются друг от друга по сложности вычислений и точности результата [3, 9].

Рассмотрим два метода приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка: метод последовательных приближений (Пикара) и метод разложения решения в степенной ряд, реализованные в математическом пакете Maple [5, 7].

Метод разложения решения в степенной ряд. Рассмотрим сначала дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Пусть правая часть уравнения (1) является аналитической функцией в начальной точке (x_0, y_0), т. е. в некоторой окрестности этой точки может быть разложена в степенной ряд вида

$$f(x, y) = \sum_{p,q=0}^{\infty} c_{pq}(x - x_0)^p (y - y_0)^q$$

где p, q – целые неотрицательные числа и c_{pq} – постоянные коэффициенты. Тогда существует единственное решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2), причем это решение является аналитическим в точке x_0 и, следовательно, может быть представлено в виде ряда Тейлора

$$y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p (x - x_0)^p \quad \left(|x - x_0| < h\right), \tag{3}$$

где $c_p = \dfrac{1}{p!} y^{(p)}(x_0)$ (p=0,1,2…) и h – некоторое положительное число.

Коэффициент c_0 разложения (3) определяется непосредственно из начального условия (2):

$$c_0 = y(x_0) = y_0;$$

следующий коэффициент c_1 находится на основании дифференциального уравнения (1):

$$c_1 = y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Что касается остальных коэффициентов c_p ($p>1$) ряда (3), то они могут быть шаг за шагом найдены путем последовательного дифференцирования данного дифференциального уравнения (1). Например, дифференцируя по x обе части уравнения (1) и используя правило дифференцирования сложной функции, будем иметь

$$y'' = f'_x(x,y) + f'_y(x,y)y'$$

Отсюда

$$c_2 = \frac{1}{2}y''(x_0) = \frac{1}{2}\left[f'_x(x_0,y_0) + f'_y(x_0,y_0)y'_0\right],$$

где число $y'_0 = f(x_0,y_0)$ уже известно.

Далее находим

$$c_3 = \frac{1}{6}y'''(x_0) = \frac{1}{6}\left[f''_{xx}(x_0,y_0) + 2f''_{xy}(x_0,y_0)y'_0 + f''_{yy}(x_0,y_0){y'_0}^2 + f'_y(x_0,y_0)y''_0\right]$$

Аналогично могут быть определены коэффициенты c_4, c_5 и т. д. и, следовательно, формально построено аналитическое решение $y(x)$.

Метод разложения решения дифференциального уравнения в степенные ряды часто используется как элемент более практичных методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. В частности, для некоторых численных методов интегрирования дифференциальных уравнений требуется определить значения искомых функций в нескольких точках. Эти значения при соблюдении известных условий гладкости данного уравнения могут быть с любой степенью точности подсчитаны с помощью степенных рядов [2, 6].

Задача №1: Методом разложения в степенной ряд найти значение $y(0.5)$, где y – решение дифференциального уравнения: $y' = x + y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$, на отрезке $[0;0.5]$.

Решение:

Полагая $x_0 = 0$ и

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{1}{2!}y_0''(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}y_0'''(x - x_0)^3 + \ldots$$

$(y_0^{(p)} = y^{(p)}(x_0);\ p = 0, 1, 2\ldots)$,

будем иметь

$y_0 = 1,\ y_0' = 0 + 1^2 = 1$

Дифференцируя данное уравнение $y' = x + y^2$, получим:

> diff (x+y(x)^2, x);

$$1 + 2\,\mathrm{y}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)$$

Отсюда

$y_0'' = 1 + 2 \cdot 1 = 3$.

Дифференцируя еще раз, будем иметь

> diff (diff(x+y(x)^2, x), x);

$$2\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)^2 + 2\,\mathrm{y}(x)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right)$$

Поэтому

$y_0''' = 2(1 + 1 \cdot 3) = 8.$

Аналогично находим остальные производные:

$y_0^{(4)} = 34,\ y_0^{(5)} = 138,\ y_0^{(6)} = 1096$.

Таким образом,

$$y = 1 + 1x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{8}{6}x^3 + \frac{34}{24}x^4 + \frac{138}{120}x^5 + \frac{1096}{720}x^6 + \ldots$$

Отсюда имеем $y(0.5) \approx 2.190$.

Задача №2: Методом разложения в степенной ряд найти приближенное решение дифференциального уравнения $y' = x\,y$ при $x = 1$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение:

Из уравнения $y' = x\,y$, подставляя начальные условия, получим: $y'(0) = 0.$

Затем находим вторую производную:

```
> diff (x*y(x), x);
```

$$\mathrm{y}(x) + x\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)$$

Подставляя начальные условия, получим:

$y''(0) = 1.$

Находим третью производную:

```
> diff (diff(x*y(x), x), x);
```

$$2\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right) + x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right)$$

Подставляем начальные условия:

$y'''(0) = 0.$

Далее, находим четвертую производную:

```
> diff (diff (diff(x*y(x), x), x), x);
```

$$3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right) + x\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\mathrm{y}(x)\right)$$

Подставляем начальные условия:

$y^{(4)} = 3 \cdot 1 + 0 = 3.$

и т. д.

Таким образом, используя формулу (3), получаем разложение в степенной ряд:

$$y = 1 + 0 + \frac{1}{2}x^2 + 0 + \frac{3}{24}x^4 + 0 + \ldots$$

Подставив в полученное выражение $x = 1$, получим $y(1) = 1{,}625.$

Сравним полученный приближенный результат с точным решением ДУ $y(x) = e^{x^2/2}$ (см. табл. 1):

Таблица 1

x	Точное решение	Численное решение	$\Delta y = \mid y_{точное} - y_{численное} \mid$	$\delta = \dfrac{\Delta y}{y_{точное}}$
0	1,00000	1,00000	0,00000	0,000000
0.2	1,02020	1,02020	0,00000	0,000000
0.4	1,08329	1,08320	0,00009	0,000083
0.6	1,19722	1,19620	0,00102	0,000852
0.8	1,37713	1,37120	0,00593	0,004306
1	1,64872	1,62500	0,02372	0,014387

По результатам таблицы, видно, что погрешность вычислений достаточно мала.

Задача №3: Методом последовательных приближений найти значение $y(0.5)$, где y – решение дифференциального уравнения: $y' = x + y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$, на отрезке $[0; 0.5]$ (расчет вести до второго приближения).

Решение:

Запишем для данного случая формулу метода Пикара:

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x (x + y_{n-1}^2)dx.$$

Начальным приближением будем считать функцию $y_0(x) = 1$.

Имеем,

```
> y1:=simplify (1+int (x+1, x=0…x));
```

$$y1 := 1 + \frac{1}{2}x^2 + x$$

Далее получаем,

```
> y2:= simplify (1+int (x+simplify (1+int (x+1, x=0…x))^2, x=0…x));
```

$$y2 := 1 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x$$

и т. д.

Найдем значение при $x = 0{,}5$:

$y(0.5) \approx 1{,}976.$

Задача №4: Методом последовательных приближений найти приближенное решение дифференциального уравнения $y' = x\,y$ при $x = 1$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение:

Запишем для данного случая формулу метода Пикара:

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x (xy_{n-1})dx.$$

Начальным приближением будем считать функцию $y_0(x) = 1$.

Имеем,

> y1:=simplify (1+int (x*1, x=0…x));

$$y1 := 1 + \frac{1}{2}x^2$$

Далее находим второе приближение:

>y2:=simplify (1+int (x*simplify (1+int (x*1, x=0…x)), x=0…x));

$$y2 := 1 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^2$$

Аналогично находим третье приближение:

>y3:=simplify (1+int (x*simplify (1+int (x*simplify (1+int (x*1, x=0…x)), x=0…x)), x=0…x));

$$y3 := 1 + \frac{1}{48}x^6 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^2$$

и т. д.

Найдем приближенное решение данного ДУ при $x = 1$, для этого в третье приближение вместо x подставим $x = 1$ и получим:

$y(1) \approx 1{,}646.$

Сравним полученный приближенный результат с точным решением ДУ (табл. 2):

Таблица 2

x	Точное решение	Численное решение	$\Delta y = \lvert y_{точное} - y_{численное} \rvert$	$\delta = \frac{\Delta y}{y_{точное}}$
0	1,000000	1,000000	0,000000	0,000000
0.2	1,020201	1,020201	0,000000	0,000000
0.4	1,083287	1,083285	0,000002	0,000002
0.6	1,197217	1,197172	0,000045	0,000038
0.8	1,377128	1,376661	0,000467	0,000339
1	1,648721	1,645833	0,002888	0,001752

По результатам таблицы, видно, что погрешность вычислений очень мала.

Сравним полученные результаты по каждому методу с точным решением дифференциального уравнения (табл. 3):

Таблица 3

x	Точное решение	Метод разложения решения в степенной ряд	Метод Пикара
0	1,000	1,000	1,000
0.2	1,020	1,020	1,020
0.4	1,083	1,083	1,083
0.6	1,197	1,196	1,197
0.8	1,377	1,371	1,377
1	1,649	1,625	1,646

По результатам таблицы, видно, что наиболее точным, из двух рассмотренных методов, является метод последовательных приближений

Пикара, относительная погрешность δ=0,002, менее точен метод разложения решения в степенной ряд (δ=0,015).

Каждый способ приближённого решения дифференциального уравнения имеет свои преимущества и недостатки, в зависимости от поставленной задачи следует использовать конкретные методы.

Список литературы

1. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин; под ред. А.А. Самарского. – М.: Наука, 1978. – 512 с.: ил.

2. Kaliev I.A., Sabitova G.S. Practicum at the rate «Mathematical packages» / I.A. Kaliev, G.S. Sabitova // Navigator in the world of science and education. – M.: FGBNU IOO RAO, 2011. – №. 8 (16). – P. 47-48.

3. Kaliev I.A., Adylova A.A. Using the MathCAD package for solving differential equations / I.A. Kaliev, A.A. Adylova // Аллея науки. – 2018. – Т. 1. – № 7 (23). – С. 420-424.

4. Рыбаков К.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Практический курс: учебное пособие / К.А. Рыбаков, А.С. Якимова, А.В. Пантелеев. – М.: Логос, 2010. – 384 с.

5. Сабитова Г.С. Лабораторный практикум по информационным технологиям в математике: учеб. пособие / Г.С. Сабитова. – Стерлитамак: СГПА, 2008. – 216 с.

6. Сабитова Г.С., Калиев И.А. Компьютерный практикум по дисциплине «Пакеты математического моделирования» / Г.С. Сабитова, И.А. Калиев // Хроники объединенного фонда электронных ресурсов «Наука и образование». – 2017. – № 08 (99). – С. 56.

7. Сабитова Г.С., Калиев И.А. Практикум по информационным технологиям. Часть 2: учеб. пособие / Г.С. Сабитова, И.А. Калиев. – Стерлитамак: РИО Стерлитамакского филиала БашГУ, 2016. – 135 с.

8. Треногин В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник / В.А. Треногин. – М.: Физматлит, 2009. – 312 с.

9. Формалев В.Ф. Численные методы: учебник / В.Ф. Формалев, Д.Л. Ревизников. – М.: Физматлит, 2006. – 399 с.

Сведения об авторах

Сабитова Гульнара Сагындыковна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и программирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета; Россия, г. Стерлитамак.

Тынчтыкова Динара Тынчтыковна – студент естественнонаучного факультета, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета; Россия, г. Стерлитамак.